

TRASFORMATA DI LAPLACE

Esercizi svolti

1. Determinare le trasformate di Laplace delle funzioni: $e^{-t/2} \cosh 3t$, $(e^t + \cos t)^2$, $t \sin t$.

2. Determinare le antitrasformate di Laplace delle funzioni:

$$f(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3}, \quad g(s) = \frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}$$

3. (a) Verificare che $\int_0^{2\pi} e^{-st} \sin t \, dt = (1 - e^{-2\pi s}) \mathcal{L}[\sin t](s)$.

(b) Sia $F(t)$ la funzione 2π -periodica, uguale a $\sin t$ su $(0, \pi]$ e 0 su $(\pi, 2\pi]$. Determinare $\mathcal{L}[F]$.

4. Determinare la trasformata $f(s)$ della funzione $F(t) = \begin{cases} (1+t)^2, & 0 < t < 1 \\ 1+t^2, & 1 \leq t. \end{cases}$

Per quali valori di s è $f(s)$ definita?

5. Calcolare (a) $\int_0^\infty t e^{-4t} \sin t \, dt$, (b) $\int_0^\infty e^{-t} \frac{1 - \cos t}{t} \, dt$.

6. (a) Data $\mathcal{L}[t^n] = n!/s^{n+1}$, trovare $\int_0^\infty e^{-t} t^n \, dt$.

(b) Dimostrare che $\mathcal{L}[\sqrt{t}](s) = c s^{-3/2}$ dove c è una costante.

7. Partendo da $\mathcal{L}[\sin t] = 1/(s^2+1)$, usare le formule per trasformare una derivata o un integrale per determinare le antitrasformate di

$$f(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}, \quad g(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}, \quad h(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

8. Usare la trasformata di Laplace per trovare le soluzioni di

$$(a) \begin{cases} x_1' = 2x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x'' + 2x' + 5x = e^{-t} \sin t \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \end{cases}$$

9. Determinare la soluzione del problema $\begin{cases} x'' + x = f(t) \\ x(0) = 0 = x'(0) \end{cases}$ per $t > 0$, nei casi in cui $f(t)$ è uguale a:

(a) $\cos t$, (b) $\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\varepsilon)$, (c) $\delta(t)$.

TRASFORMATA DI LAPLACE

Esercizi svolti – SOLUZIONI

1.

$$\mathcal{L}[e^{-t/2} \cosh t] = \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 - 1} = \frac{4s + 2}{4s^2 + 4s - 3}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(e^t + \sin t)^2] &= \mathcal{L}[e^{2t} + 2e^t \sin t + \sin^2 t] \\ &= \mathcal{L}[e^{2t}] + \mathcal{L}[2e^t \sin t] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[1 - \cos 2t] \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-1)^2 + 1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right) \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s^2 - 2s + 2} + \frac{2}{s(s^2 + 4)}.\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[t \sin t] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}.$$

2.

$$f(s) = \frac{3s + 7}{(s + 1)(s - 3)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s - 3} = \frac{A(s - 3) + B(s + 1)}{(s + 1)(s - 3)}$$

Il modo più rapido per determinare i coefficienti A e B è quello di moltiplicare la precedente equazione per $(s + 1)$ e porre $s = -1$, ottenendo $A = -1$, e moltiplicare per $(s - 3)$ e porre $s = 3$, ottenendo $B = 4$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[f] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s + 1} + \frac{4}{s - 3}\right] \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[f] = -e^{-t} + 4e^{3t}.$$

Analogamente

$$\begin{aligned}g(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + 1} + \frac{D}{s + 2} = \\ &= \frac{As(s + 1)(s + 2) + B(s + 1)(s + 2) + Cs^2(s + 2) + Ds^2(s + 1)}{s^2(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s^2(s + 1)(s + 2)}.\end{aligned}$$

Moltiplicando la precedente equazione per s^2 e ponendo $s = 0$ si ottiene $B = \frac{1}{2}$, moltiplicando per $(s + 1)$ e ponendo $s = -1$ si ottiene $C = 1$ e infine moltiplicando per $(s + 2)$ e ponendo $s = -2$ si ottiene $D = \frac{1}{4}$.

Quindi

$$g(s) = \frac{A}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{4} \frac{1}{s + 2}.$$

Ponendo inoltre $s = 1$ si ha $\frac{1}{6} = A + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}$ e quindi $A = -\frac{3}{4}$.

In conclusione si ottiene

$$\mathcal{L}^{-1}[g] = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

3. (a) Sia $I = \int_0^{2\pi} e^{-st} \sin t \, dt$. Integrando per parti,

$$\begin{aligned} I &= \left[-e^{-st} \cos t \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (-se^{-st}) \cos t \, dt \\ &= 1 - e^{-2\pi s} + [-se^{-st} \sin t]_0^{2\pi} + s \int_0^{2\pi} (-se^{-st} \sin t \, dt \\ &= 1 - e^{-2\pi s} + 0 - s^2 I. \end{aligned}$$

Quindi, $I(1 + s^2) = 1 - e^{-2\pi s}$, e il risultato segue dal fatto che $\mathcal{L}[\sin] = 1/(s^2 + 1)$.

(b) Si applichi la formula

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-st} \sin t \, dt}{1 - e^{-2\pi s}}.$$

L'integrale risulta uguale a $(1 + e^{-s\pi})/(s^2 + 1)$ (vedi punto (a)) e quindi

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{1}{s^2 + 1} \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{1}{(s^2 + 1)(1 - e^{-\pi s})}.$$

4.

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^1 e^{-st}(1+2t+t^2)dt + \int_1^\infty e^{-st}(1+t^2)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}(1+t^2)dt + \int_0^1 e^{-st} 2t \, dt \\ &= \mathcal{L}[1+t^2] + \left[-\frac{1}{s} e^{-st} 2t \right]_0^1 + \frac{1}{s} \int_0^1 e^{-st} 2 \, dt \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} 2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s} e^{-s} + \frac{2}{s^2} (1 - e^{-s}). \end{aligned}$$

L'integrale improprio converge se $e^{-st} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$, quindi $f(s)$ è definita per $s > 0$.

5. (a) L'integrale è uguale a $\mathcal{L}[t \sin t](4) = \frac{8}{(4^2 + 1)^2} = \frac{8}{289}$.

(b) L'integrale è uguale a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{1 - \cos t}{t}\right](1) &= \int_1^\infty \mathcal{L}[1 - \cos t] \, ds = \int_1^\infty \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}\right) ds \\ &= [\ln s - \frac{1}{2} \ln(s^2 + 1)]_1^\infty \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{s^2}{1 + s^2}\right]_1^\infty = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

6. (a) L'integrale è il valore $\mathcal{L}[t^n](1)$ della trasformata di Laplace per $s = 1$, uguale a $n!$

(b) Ponendo $u = st$,

$$\int_0^\infty e^{-st} \sqrt{t} \, dt = \int_0^\infty e^{-u} \sqrt{\frac{u}{s}} \frac{1}{s} \, du = \frac{c}{s^{3/2}},$$

dove $c = \int_0^\infty e^{-u} \sqrt{u} \, du$.

7.

$$f(s) = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[f] = \frac{1}{2} t \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] = \frac{1}{2} t \sin t.$$

$$g(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[\frac{1}{2} \sin 2t \right] \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[g](t) = \int_0^t \frac{1}{2} \sin 2u \, du = \left[-\frac{1}{4} \cos 2u \right]_0^t = \frac{1}{4} (1 - \cos 2t).$$

$$h(s) = \frac{1}{s} f(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[h] = \int_0^t \frac{1}{2} u \sin u \, du = \frac{1}{2} [\sin u - u \cos u]_0^t = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t.$$

8. (a) Se $g_1 = \mathcal{L}[x_1]$ e $g_2 = \mathcal{L}[x_2]$, allora

$$\begin{cases} sg_1 - 1 = 2g_1 - 4g_2 \\ sg_2 = g_1 - 2g_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-2)g_1 + 4g_2 = 1 \\ -g_1 + (s+2)g_2 = 0 \end{cases}.$$

Ne segue

$$\begin{cases} g_1(s) = \frac{s+2}{s^2} \\ g_2(s) = \frac{1}{s^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 1 + 2t \\ x_2(t) = t \end{cases}.$$

(b) La trasformata della equazione è

$$(s^2 + 2s + 5)g(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \Rightarrow g(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 2s + 2)}.$$

È possibile scrivere

$$\frac{1}{(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s^2 + 2s + 5} + \frac{B}{s^2 + 2s + 2},$$

visto che la frazione coinvolge solo $S = s^2 + 2s$. Allora,

$$\text{moltiplicando per } S + 5 \text{ e ponendo } S = -5 \Rightarrow -\frac{1}{3} = A$$

$$\text{moltiplicando per } S + 2 \text{ e ponendo } S = -2 \Rightarrow \frac{1}{3} = B.$$

Quindi

$$g(s) = -\frac{1}{3} \frac{1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{3} \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \Rightarrow x(t) = e^{-t} \left(-\frac{1}{6} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin t \right).$$

9. (a) Ponendo $g = \mathcal{L}[x(t)]$, si ha $\mathcal{L}[x''] + \mathcal{L}[x] = 1/(s^2 + 1)$. Quindi,

$$s^2 g(s) + g(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \Rightarrow g(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2} \Rightarrow x(t) = (\text{da q 1}) \frac{1}{2} t \sin t.$$

(b) Dato $\mathcal{L}[\mathcal{U}(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$, si ha

$$\begin{aligned} s^2 g(s) + g(s) &= \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{s} \Rightarrow g(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} - e^{-\varepsilon s} \frac{1}{s(s^2 + 1)} \\ \Rightarrow x(t) &= 1 - \cos t - (1 - \cos(t-\varepsilon))\mathcal{U}(t-\varepsilon) = \begin{cases} 1 - \cos t, & t < \varepsilon \\ \cos(t-\varepsilon) - \cos t, & \varepsilon < t, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{poichè } \mathcal{L}[1 - \cos t] = \frac{1}{s(s^2 + 1)}.$$

(c) Dato che $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, questa volta

$$g(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \sin t, \quad t > 0.$$

Questa soluzione corrisponde al limite (per $\varepsilon \rightarrow 0$) di $\frac{1}{\varepsilon}x(t)$ dove $x(t)$ è la soluzione (b).